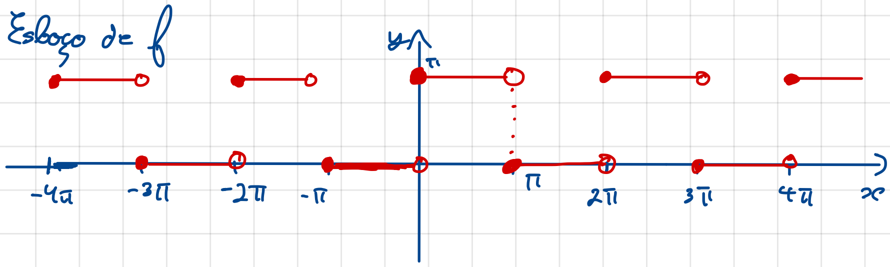
Aula 7

Séries de Fourier

↳ Têm imensas aplicações na vida real. Em informática, por exemplo, usam-se para manter o som e a imagem com boa qualidade quando se comprimem ficheiros MP3, JPEG etc.

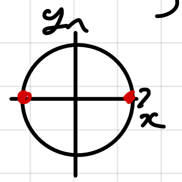
Exercício 1 a) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 2π-periódica

Esboço de f



Nota: $\int u' \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$

$\int u' \sin u \, du = -\cos u + C$



$\operatorname{sen}(n\pi) = 0$

$\cos(n\pi) = (-1)^n$

Calcular a_0, a_n, b_n

- $\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx} = \frac{1}{\pi} \left(\underbrace{\int_{-\pi}^{0} 0 \, dx}_{=0} + \int_{0}^{\pi} \pi \, dx \right) = \frac{1}{\cancel{\pi}} \cdot [\cancel{\pi} x]_0^{\pi} = \pi - 0$

$= \pi \leadsto a_0 = \pi$

- $\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx} = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} 0 \, dx + \int_{0}^{\pi} \pi \cos(nx) dx \right)$

$= \frac{1}{n} \int_{0}^{\pi} n \cos(nx) dx = \frac{1}{n} [\operatorname{sen}(nx)]_0^{\pi}$

$u = nx$; $u' = (nx)' = n$

$= \frac{1}{n} \left(\underbrace{\operatorname{sen}(n\pi)}_{=0} - \underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{=0} \right) = 0$ $a_n = 0$

- $\boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx} = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} 0 \, dx + \int_{0}^{\pi} \pi \operatorname{sen}(nx) dx \right)$

$= \frac{1}{n} \int_{0}^{\pi} n \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{1}{n} [-\cos(nx)]_0^{\pi}$

$u = nx$, $u' = n$

$= \frac{1}{n} \left(-\cos(n\pi) - (-\cos(0)) \right) = \frac{1}{n} \left(-(-1)^n + 1 \right)$

$= \begin{cases} 0, & n \text{ é par} \\ \frac{2}{n}, & n \text{ é ímpar} \end{cases}$

Escrever a série de Fourier

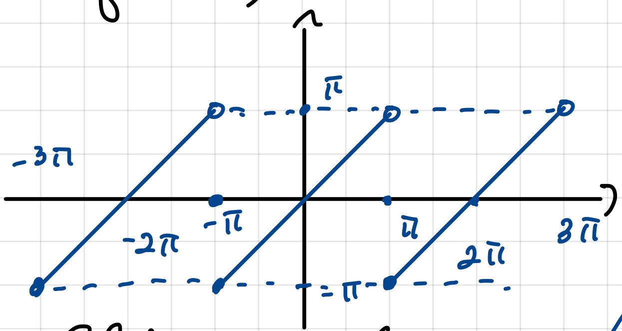
$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\underbrace{a_m}_{=0} \cos(mx) + b_m \operatorname{sen}(mx) \right]}$$

$$\sim \frac{\pi}{2} + \left(2 \operatorname{sen} x + 0 + \frac{2}{3} \operatorname{sen}(3x) + 0 + \frac{2}{5}(5x) + \cdots\right.$$

Ver applet slide 47

$$\sim \frac{\pi}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{2m-1} \operatorname{sen}((2m-1)x)$$

b) $f(x) = x$, em $[-\pi, \pi[$



Calcular a_0, a_m, b_m

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_m = 0 \end{array}\right\} \text{T.P.C.}$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(mx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(mx)\,dx}_{\text{integração por partes}}$$

C. aux

$v = x \to v' = 1$

$u' = \operatorname{sen}(mx) \to u = -\frac{1}{m}\cos(mx)$

C. aux

$\frac{1}{m}\int m \operatorname{sen}(mx)\,dx = -\frac{1}{m}\cos(mx)$ $+ c$

$u = mx$, $u' = m$

$c = 0$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{\pi}\cos(mx) \times x\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{m}\cos(mx) \times 1\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{m}\underbrace{\cos(m\pi)}_{=(-1)^m} \times \pi + \frac{1}{m}\underbrace{\cos(-m\pi)}_{=(-1)^{m}} \times (-\pi) + \frac{1}{m}\frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi} m\cos(mx)\,dx\right)$$

$u = mx$

$u' = m$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{m} \times (-1)^m \times \pi - \frac{1}{m}(-1)^m \times \pi + \frac{1}{m^2}\underbrace{\left[\operatorname{sen}(mx)\right]_{-\pi}^{\pi}}\right)$$

$\hookrightarrow \underbrace{\operatorname{sen}(m\pi)}_{=0} - \underbrace{\operatorname{sen}(-m\pi)}_{=0}$

$$= \frac{1}{\cancel{\pi}}\left(-\frac{2}{m}(-1)^m \cancel{\pi} + 0\right)$$

$$= \frac{-2}{m}(-1)^m = (-1)^{m+1} \times \frac{2}{m}$$

Escrever a série de Fourier

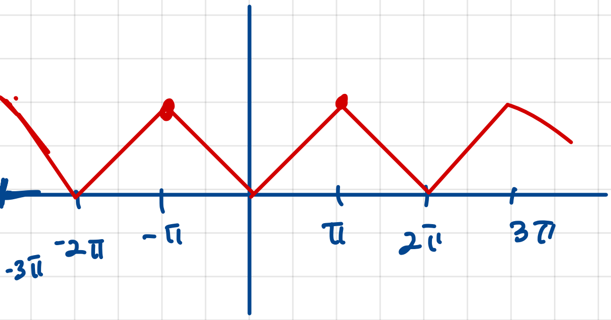
$$f(x) \sim \frac{\overset{=0}{a_0}}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\overset{=0}{a_m} \cos(mx) + b_m \operatorname{sen}(mx)\right]$$

$$\sim \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m+1} \times \frac{2}{m} \operatorname{sen}(mx)$$

Exercício 2

a) $f(x) = |x|$ em $[-\pi, \pi[\rightsquigarrow f(x) = \begin{cases} x \text{ se } 0 \leq x < \pi \\ -x \text{ se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ f é 2π periódica

1.º Passo: Gráfico de f



f é par (e contínua) → é importante para a próxima aula

2.º Passo: Como f é par $\rightsquigarrow b_n = 0$

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi} \times \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \times \left(\frac{\pi^2}{2} - 0\right) = \pi$$

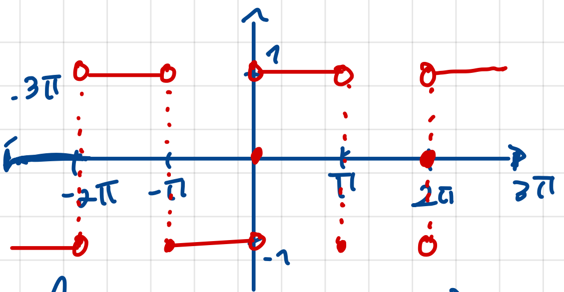
$$\boxed{a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx \overset{\text{int. partes}}{=} \underset{\text{TPC}}{\dots} = \begin{cases} 0, & n \text{ é par} \\ -\frac{4}{n^2\pi}, & n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

3.º Passo: Série de Fourier

$$f(x) \sim \overset{\text{TPC}}{\dots} \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{4}{\pi}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$$

b) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-\pi, 0[\\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x \in]0, \pi[\end{cases}$

1.º Passo:



f é ímpar (em $[-\pi, \pi[$)

2.º Passo:

Como f é ímpar: $a_0 = 0$ e $a_n = 0$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)\,dx} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \times \text{sen}(nx)\,dx$$

$$= \underset{\dots}{\text{TPC}} = \begin{cases} 0, & n \text{ é par} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

3.º Passo:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\overset{0}{a_n} \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \right]$$

$$\sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \operatorname{sen}((2n+1)x$$

Exercício 3 $f(x) = x$, com $x \in [0, \pi[$

a) Série de Fourier de cossenos de f ⇝ extensão par

↳ Nota: dá a função do ex 2.a)

A série pedida é a que obtivemos no ex 2a)

b) Série de Fourier de senos de f ⇝ extensão ímpar

↳ Nota: dá a função do ex. 1b)

A série pedida é a que obtivemos no ex. 1b)

Nota: Se ainda não a tivessemos calculado, como sabem que a função é ímpar, usar:

$a_0 = 0$

$a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx$$